מבני נתונים 2 — תרגיל בית 2

(4 עמודים)

הגשה: 28/May/2006 (**בזוגות**)

שאלה 7

קשה הוכיחו או הפריכו: ניתן לקבל כל עץ בינרי על ידי סדרה של פעולות `insert`, `delete`, ו־`find` המתחילה בעץ splay ריק.

הערות:

- בביטוי "כל עץ בינרי" ההתיחסות היא למבנה העץ—אין חשיבות למפתחות בצמתים (שני עצים נחשבים זהים אם נקבל מהם עצים זהים כאשר נחליף בכל אחד מהם, לכל i, את המפתח ה־i בגודלו במספר i).
- בשאלה זו, פעולת $\texttt{delete}(x)$ ממומשת באופן הבא. אם לצמת בו נמצא המפתח x אין בנים, או שיש לו רק בן אחד (ימני או שמאלי), מסלקים את הצמת. אחרת מסלקים את הצמת הימני ביותר בתת־עץ השמאלי שלו (לאחר העתקת המפתח). בכל מקרה מתחילים את ה־splay מאביו של הצמת המסולק.

שאלה 8

הוסיפו למבנה הנתונים עצים דינמיים את הפעולה $\texttt{delete}(v)$ אשר מוציאה את הצומת v מהמבנה. (העץ בו v נמצא מתפרק לתת־עצים באופן הצפוי.) על המימוש לקיים שסיבוכיות זמן הפחת של כל אחת מהפעולות על המבנה היא $O(\log n)$, כאשר n הוא מספר הצמתים במבנה ברגע ביצועה.

שאלה 9

קשה נתון מבנה נתונים סטטי התומך בשאילתות פריקות ומקיים:

1. ניתן לחשב את f בסיבוכיות זמן $O(1)$ (ולכן חישוב תשובה סופית מתוך k תשובות ביניים אורך $O(k)$ זמן).
2. $Q_S(n) = O(\log n)$.
3. $P_S(n) = O(n \log n)$.

הראו כיצד להפוך את המבנה לחצי דינמי כך ש־$I_D(n) = Q_D(n) = O(\log^2 n)$.

הערה: כדי לפתור שאלה זו יתכן ויהיה צורך בהנחה לא שיגרתית (אך סבירה בהחלט) לגבי מודל החישוב.

בפתרון שאלה זו אסור כל שיתוף פעולה, למעט בין בני זוג המגישים עבודה משותפת.

שאלה 10

תהי $\vec{p} = p_1, p_2, \ldots, p_n$ סדרת מספרים שונים. ערימה סימטרית על $\vec{p}$ היא עץ בינרי, שבו הצמתים הם איברי $\vec{p}$, המקיים:

1. כל צומת קטן מכל צאצאיו האמיתיים.
2. סדר inorder של הצמתים הוא הסדר של $\vec{p}$.

(זהו בעצם treap שבו לאיבר ה־i יש מפתח i ועדיפות p_i.)

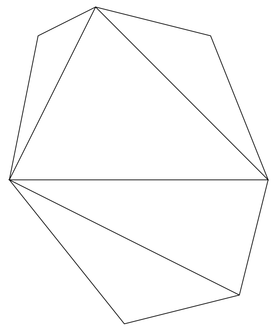
הציעו אלגוריתם המקבל סדרה $\vec{p}$ ובונה ערימה סימטרית עבורה בסיבוכיות זמן $O(n)$.

שאלה 11

שאלה זו עוסקת במצולעים קמורים במישור בעלי n קודקודים.

הנחה: אין במצולע שלושה קודקודים על ישר או ארבעה קודקודים על מעגל.

הגדרה: שילוש (triangulation) של מצולע הוא חלוקתו למשולשים על ידי חלק מאלכסוניו, כך שאין בשילוש שני אלכסונים שנחתכים (למעט חיתוכים בקודקודי המצולע). לדוגמא:

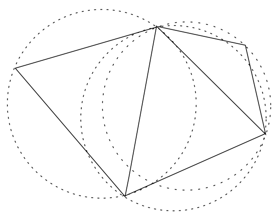


(5) א. הוכיחו: כל שילוש משתמש ב־$n-3$ אלכסונים בדיוק.

(15) ב. עבור משולש T, נכנה את העיגול הפתוח ששפתו היא המעגל החוסם את T בשם העיגול של T.

הגדרה: שילוש Delaunay, או בקיצור DT, של מצולע הוא שילוש שבו לכל משולש T, העיגול של T אינו מכיל אף קודקוד של המצולע. ידוע שלכל מצולע קיים DT יחיד.

דוגמא:



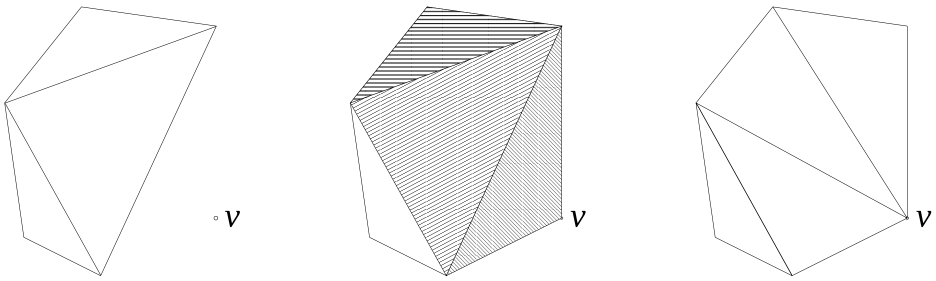
בעמוד הבא מופיע אלגוריתם רנדומי המקבל כקלט מצולע ומוצא את ה־DT שלו. נתחו (ניתוח אסימפטוטי) את תוחלת זמן ריצתו. אין צורך לוודא את נכונותו או להוכיחה.

הקלט לאלגוריתם הוא רשימת קודקודי המצולע לפי הסדר באחד הכיוונים סביב שפתו.

האלגוריתם:

1. אם המצולע הוא משולש, החזר את השילוש הריק.
2. אחרת:
   (א) בחר קודקוד אקראי v (בהתפלגות אחידה).
   (ב) סלק את v וחבר את שני שכניו בצלע חדשה. מצא רקורסיבית את ה־DT של המצולע המתקבל.
   (ג) החזר למצולע את v ואת שתי הצלעות השכנות לו (מבלי לסלק את הצלע שהוספה בין שכניו; צלע זו הופכת עכשיו לאלכסון בשילוש). מתקבל שילוש של המצולע המקורי.
   (ד) מצא את כל המשולשים "הרעים" בשילוש הנ"ל. המשולשים הרעים הם אלה שהעיגול שלהם מכיל את v, ובנוסף, גם המשולש המורכב מ־v ושני שכניו נחשב רע.
   (ה) ידוע שאיחוד המשולשים הרעים הוא מצולע קמור; נסמנו P. סלק את האלכסונים של P שמופיעים בשילוש, והכנס במקומם את כל האלכסונים המחברים את v עם קודקודי P.

בפתרון השאלה הניחו ששורה 2(א) דורשת $\mathrm{O}(1)$ זמן וששורות 2(ד) ו־2(ה) דורשות זמן ליניארי במספר המשולשים הרעים.



האיורים מדגימים את פעולת האלגוריתם. האיור השמאלי מראה את ה־DT המוחזר מהרקורסיה; האיור האמצעי מראה את השילוש המתקבל מהחזרת v למצולע ואת המשולשים הרעים (השטח המקווקו הוא המצולע P); האיור הימני מראה את השילוש הסופי שהאלגוריתם מחזיר.

שאלה 12

נתון מחשב המסוגל להריץ תהליך אחד בלבד בכל רגע נתון ואין לו אפשרות preemption, כלומר, תהליך שמתחיל לרוץ, ימשיך לרוץ ברציפות עד שהוא יסתיים. המחשב מופעל בזמן $t=0$ והוא יכול להריץ תהליכים החל מרגע זה ואילך.

נגדיר בעיה של תיזמון תהליכים במחשב זה:

הקלט לבעיה הוא קבוצה של n תהליכים. התהליך ה־i מאופיין על ידי שלושה פרמטרים:

- אורך, המסומן על ידי $l(i)$. זהו מספר חיובי כלשהו.
- תאריך יעד (deadline), המסומן על ידי $d(i)$. זהו מספר כלשהו המקיים $d(i) \geq l(i)$.
- משקל, המסומן על ידי $w(i)$. זהו מספר שלם בתחום $1, \ldots, \lfloor n \log_2 n \rfloor$.

בנוסף לתהליכים נתון מספר שלם חיובי W.

נגדיר: עבור סדרה $i_1, i_2, \ldots, i_k$ של תהליכים, שהיא תת־קבוצה של אוסף התהליכים שבקלט, תיזמון חוקי שלה הוא סדרת זמנים $t_1, t_2, \ldots, t_k$ כך שאם נתחיל להריץ כל תהליך i_j בזמן t_j, אז כל אחד מהתהליכים יסתיים בתאריך היעד שלו או לפני כן, ולא תהיה חפיפה בין הזמנים בהם רצים תהליכים שונים (אולם מותר שתהליך אחד יתחיל באותה נקודת זמן בה מסתיים תהליך אחר). פורמלית, הדרישות הן:

- לכל $1 \leq j \leq k$, $0 \leq t_j \leq d(i_j) - l(i_j)$.
- לכל $j \neq j'$, או ש־$t_j + l(i_j) \leq t_{j'}$, או ש־$t_{j'} + l(i_{j'}) \leq t_j$.

האורך של תיזמון חוקי הוא רגע סיום התהליך האחרון בו, כלומר, $\max\{t_j + l(i_j) \,|\, 1 \leq j \leq k\}$.

הבעיה שיש לפתור היא, בהנתן קבוצת n התהליכים והמספר W, מהו T^* המינימלי כך שקיימת תת־קבוצה של תהליכים שמשקלם הכולל הוא בדיוק W ויש עבורה תיזמון חוקי באורך T^*. (אם אין תת־קבוצה כזו, יש להחזיר $T^* = \infty$).

הציעו אלגוריתם לפתרון הבעיה שפועל בסיבוכיות זמן $\mathrm{O}(n^3 \log n)$.