# מבני נתונים 2 — תרגיל בית 1

(3 עמודים)

**הגשה:** 01/May/2006 (**בזוגות**)

## שאלה 1

שאלה זו עוסקת בפרמוטציות של $\{1, 2, \ldots, n\}$. עבור פרמוטציה $\pi$, האיבר ה־$i$ יסומן על ידי $\pi(i)$. נגדיר סדר בין הפרמוטציות באופן הבא. בהנתן $\pi_1, \pi_2$ שונות, יהי $l$ האינדקס המינימלי כך ש־$\pi_1(l) \neq \pi_2(l)$. אז $\pi_1 < \pi_2$ אםם $\pi_1(l) < \pi_2(l)$. קל לראות שהסדר מלא וחזק. נסמן ב־$\pi^+$ את הפרמוטציה העוקבת ל־$\pi$ בסדר זה.

כתבו ב־pseudo code פרוצדורה המקבלת כקלט פרמוטציה $\pi$ במערך $P[1..n]$ ומחזירה ב־$P$ את הפרמוטציה $\pi^+$. יש לממש את הפרוצדורה כך שזמן הפחת שלה יהיה $O(1)$. כלומר, יש להראות פונקצית פוטנציאל $\varphi$ כך ש־$\varphi(P) = 0$ עבור הפרמוטציה הראשונה ($P=[1, 2, \ldots, n]$), וזמן הפחת (ביחס ל־$\varphi$) של קריאה לפרוצדורה הוא $O(1)$.

<u>הערה</u> מותר להשתמש במשתנים סטטיים השומרים את ערכם בין קריאות לפרוצדורה. אם משתמשים במשתנים כאלה, אפשר להניח שהמערך $P$ והמשתנים הסטטיים קיבלו את ערכיהם כתוצאה מסדרת קריאות לפרוצדורה שהתחילה בפרמוטציה הראשונה.

## שאלה 2

<u>הקדמה:</u> בניתוח פחת מראים בדרך כלל חסמים עליונים על זמן הפחת של הפעולות השונות. הניתוח במקרה זה הוא תמיד worst case, כלומר, לגבי כל פעולה, מראים חסם על זמן הפחת שלה במקרה הגרוע ביותר. כשמדובר בחסמים תחתונים יש משמעות הן לחסימת המקרה הגרוע ביותר והן לחסימת המקרה הטוב ביותר. בשאלה זו, כאשר מדובר בחסמים תחתונים, הכוונה היא לחסמים תחתונים על המקרה הגרוע ביותר.

הטבלה הבאה מציגה את סיבוכיות הזמן של פעולות על ערימה בינרית רגילה (כפי שנלמד במבני נתונים 1).

| | |
|---|---|
| `make_heap` | $\Theta(n)$ |
| `insert` | $O(\log n)$ |
| `del_min` | $O(\log n)$ |

(הפעולה `make_heap` יוצרת ערימה מרשימת קלט של $n$ איברים.)

אנו מתעניינים בפונקציות פוטנציאל המקיימות:

1. $\varphi_0 = 0$. ($\varphi_0$— הפוטנציאל עבור ערימה ריקה.)
2. $\varphi_i \geq 0$ לכל $i$.
3. זמן הפחת של `del_min` ביחס ל־$\varphi$ הוא $O(1)$.

עבור משפחת פונקציות זו, הראו חסמים תחתונים אסימפטוטיים על זמני הפחת של `make_heap` ושל `insert`. כלומר, הראו שתי פונקציות $f(n)$ ו־$g(n)$ כך שלכל $\varphi$ כנ"ל זמן הפחת של `make_heap` הוא $\Omega(f(n))$, ושל `insert`

הוא $\Omega(g(n))$. הראו שהחסמים שמצאתם הדוקים, כלומר, הראו $\varphi$ כנ"ל כך שזמני הפחת של `make_heap` ושל `insert` ביחס ל־$\varphi$ הם $O(f(n))$ ו־$O(g(n))$ בהתאמה.

## <u>שאלה 3</u>

כידוע, זמן החיפוש במערך ממוין של איברים הוא לוגריתמי (חיפוש בינרי), אך הזמן להוספת איבר למערך הוא ליניארי. ברצוננו לשפר את זמן ההוספה על ידי שימוש במספר מערכים ממוינים. הרעיון הוא שאם ברגע נתון יש $n$ איברים במבנה, אז המבנה יכלול מספר מערכים כמתואר להלן. יהי $n_k n_{k-1} \cdots n_0$ הפיתוח הבינרי של $n$ (כלומר, $n_i \in \{0,1\}$ לכל $i$ ו־ $n = \sum_{i=0}^{k} n_i 2^i$). המבנה יכלול $k+1$ מערכים ממוינים, $A_0, A_1, \ldots, A_k$, כך שגודל המערך $A_i$ הוא $2^i$. המערך $A_i$ יהיה מלא אם $n_i = 1$, אחרת הוא יהיה ריק. כאמור, האיברים בכל מערך ממוינים, אולם אין שום דרישה על הסדר בין איברים במערכים שונים.

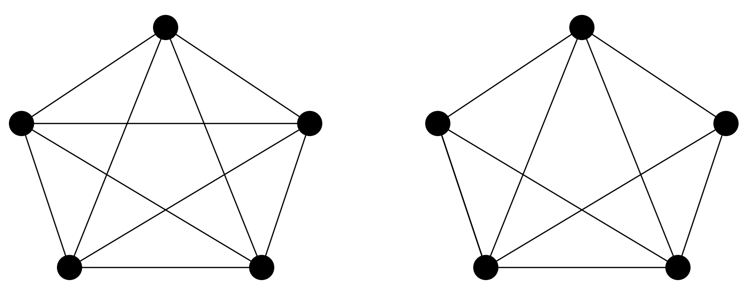
הראו כיצד לממש חיפוש ב־$O((\log n)^2)$ והכנסה בסיבוכיות פחת נמוכה עד כמה שתוכלו. נתחו את סיבוכיות הזמן האמיתי של הפעולות ואת סיבוכיות הפחת. יש להראות ניתוח פחת בשיטת האשראי או בשיטת הפוטנציאל. (כרגיל בשיטת הפוטנציאל, יש להשתמש בפונקצית פוטנציאל אי שלילית המקיימת $\varphi_0 = 0$.)

## <u>שאלה 4</u>

נשנה את ערימות פיבונצ'י כך שצמת יתנתק מאביו רק כאשר איבד שלושה מבניו. הראו שסיבוכיות זמן הפחת האסימפטוטית של הפעולות השונות אינה משתנה.

## <u>שאלה 5</u>

גרף מישורי הוא גרף שניתן לציירו במישור מבלי שקשתותיו תחתוכנה זו את זו.



לא מישורי          מישורי

<u>משפט אוילר:</u> לגרף מישורי בן $n$ צמתים יש לכל היותר $3n-6$ קשתות.

נתעניין בוריאנט הבא של אלגוריתם Fredman Tarjan למציאת עץ פורש מינימום בעזרת ערימות פיבונצ'י. האלגוריתם עוצר גידול עץ (ועובר לעץ הבא) כאשר העץ מתחבר עם עץ קודם, או כאשר גודל הערימה מגיע ל־$k$ או יותר צמתים, כאשר $k$ קבוע לכל הפאזות (וזאת בניגוד לאלגוריתם המקורי, המחשב $k$ חדש בכל פאזה).

א. הראו שעבור $k = 10$ האלגוריתם מוצא MST בגרף מישורי קשיר בזמן $\mathrm{O}(|E|)$.

ב. מצאו מספר שלם $a$ כך שעבור $k = a + 1$ האלגוריתם מוצא MST בגרף מישורי קשיר בזמן $\mathrm{O}(|E|)$,

ועבור $k = a - 1$ האלגוריתם רץ בזמן שאינו $\mathrm{O}(|E|)$ במקרה הגרוע. (יש להוכיח זאת באופן מלא.)

ג. הוכיחו או הפריכו: עבור $k = a$ (מהסעיף הקודם $a$) האלגוריתם רץ בזמן $\mathrm{O}(|E|)$.

<u>שאלה 6</u>

עץ פורש צוואר בקבוק $T$ הוא עץ פורש של $G$ שעבורו הקשת הכבדה ביותר היא המינמלית מכול עצים הפורשים של $G$. נגדיר כערך של עפ"צ את משקל הקשת הכבדה ביותר.

א. הוכח שעפ"מ הוא למעשה עפ"צ. כתוצאה נקבל שמציאת עפ"צ היא יותר לא יותר קשה ממציאת עפ"מ.

ב. מצא אלגוריתם שרץ בזמן לינארי ב $|E|$ שמוצא האם הערך של העפ"צ הוא לכל היותר $b$.

ג. השתמש באלגוריתם בסעיף הקודם כפרוצדורה למציאת אלגוריתם למציאת עפ"צ בזמן לינארי.